# LEIBNIZ CRÍTICO DE EUCLIDES. EL MÉTODO DEL *ANALYSIS SITUS*

*Mary Sol de Mora*
*marysoldemora@gmail.com*

## 1.- Introducción. La situación de partida.

Es bien sabido que Leibniz leyó con atención la mayor parte de las ediciones de Euclides, como lo corroboran de un lado las notas marginales que puso en algunos ejemplares de los *Elementos* conservados en Hannover y en Wolfenbüttel, así como sus citas al libro de Euclides en numerosos manuscritos suyos, buena parte de los cuales permanecen inéditos. En ellos proponía correcciones al texto de los *Elementos* y demostraciones alternativas a las originales y señalaba que algunos axiomas, o quizá todos, podían ser demostrados. Las ediciones de Clavius y de Barrow fueron las más importantes para Leibniz, porque las mencionó con mucha frecuencia, aunque también consultó otras muchas ediciones y comentarios de los *Elementos*, como las de J. Peletier (1557), Scheubelius (1558), Ramus (1559), Herlinus y Dasypodius (1571), Comandino (1572), Rhodius (1609), Grynaeus (1630), Hérigone (1639), Richard (1645), Tacquet (1654), Borelli (1658), Sturm (1661), Fabri (1669), Deschalles (1672), Prestet (1676), Arnauld (1678), Mercator (1678), Mourguez (1680), G. Vitale (1680), etc. Entre esa diversidad de ediciones, que en ningún caso eran ediciones críticas en el sentido actual del término, sino más bien versiones, comentarios o glosas a los *Elementos*, nos encontramos con todo tipo de modificaciones de los textos originales de Euclides, así como con variaciones en las listas de definiciones, axiomas y postulados y también en las proposiciones.

Así pues, a finales del siglo XVI y durante el siglo XVII, se habían publicado numerosas ediciones de los *Elementos* de Euclides, tanto en latín como en otras lenguas europeas. Algunos de esos editores revisaron las demostraciones de Euclides, por ejemplo, el mencionado Clavius, el director del Colegio Romano, quien presentó los razonamientos de Euclides en forma de silogismos en 1591. Leibniz comenzó a estudiar a fondo los *Elementos* de Euclides, en 1663, a los 17 años, por consejo de J. Kühn, aunque es posible que la idea le fuese sugerida por su profesor en Jena, Erhard Weigel, quien acababa de publicar un libro sobre las demostraciones aristotélico-euclídeas en 1662. También la influencia de Hobbes parece haber sido importante en relación con las demostraciones de Euclides[1]. Durante toda su vida, Leibniz mantuvo firme esta convicción y retomó sus lecturas y ensayos sobre Euclides continuadamente, aunque no publicó sus resultados. Por eso hay que rastrear sus aportaciones a los *Elementos* a través de innumerables manuscritos y algunas cartas.

## 2.- Los Elementos y la realización de una *Characteristica Geometrica*.

Tras su llegada a París, le propuso a Gallois una demostración del axioma del todo y de las partes sobre la cual volvió en varias ocasiones[2]. En el invierno de 1674-75 encontró por fin el tiempo necesario para leer más atentamente los *Elementos*[3]. En esos años, al parecer, se le ocurrió la idea de conectar el proyecto de la posible demostración de los axiomas y el de la construcción de una nueva Característica Geométrica, es decir, un nuevo análisis formal de la Geometría basado en la *situación*. En 1677 Leibniz escribió un primer ensayo sobre la *Characteristica Geometrica*, donde expuso su proyecto de construir un nuevo Análisis Geométrico diferente de los de Euclides, Arquímedes, Viète y Descartes[4]. En aquel momento, el *Analysis Situs* de Leibniz y la lectura crítica de Euclides formaron parte del mismo proyecto: se trataba de estudiar las diversas versiones de los *Elementos* para intentar aclarar si los axiomas eran tales y, en caso necesario, demostrarlos, ampliar la Geometría de las Magnitudes y construir una Geometría de las Situaciones. Para ello, había que proponer nuevas definiciones, nociones, axiomas, problemas, teoremas y demostraciones geométricas, y principalmente introducir nuevos signos o

1 En el ejemplar del *De Corpore* conservado en Hannover (1655, p. 60) Leibniz escribió en el margen '*Definitiones*' y a continuación subrayó algunos pasajes de HOBBES (1655: P-A 743).

2 Véase, por ejemplo, la edición Gerhardt de los *Philosophische Schriften*, III, 321-2; V, 207 y 395-396; VII, 20 y 273-274.

3 Leibniz utilizó sobre todo las ediciones de Clavius y de Barrow, cuyos ejemplares conservados en las bibliotecas de Hannover y Wolfenbüttel conservan sus notas marginales.

4 Ver LEIBNIZ 1995, fragmento II, pp. 50-65.

caracteres para expresar el *corpus* euclídeo y conseguir reducirlo a un Cálculo Geométrico[5].

## 3.- El escepticismo de Huygens ante el *Analysis Situs*.

Leibniz recibió con disgusto la adversa recepción por parte de Huygens[6] con respecto a este proyecto, que le impidió presentarlo para su tan deseado ingreso en la Academia de Ciencias de París. No obstante, Leibniz continuó durante mucho tiempo trabajando en él.

En un manuscrito de 10 de agosto de 1679[7], se ocupó en primer lugar de la definición de *espacio* y luego de la de *punto*, analizando y modificando la de Euclides ("punto es lo que no tiene partes"). En lugar de tomar las nociones de todo y partes como primitivas, Leibniz partió de la relación de congruencia y definió el punto, primero mediante nociones expresadas en palabras, luego mediante signos:

> *"Para tratar realmente todo esto por orden hemos de saber que la primera consideración es el espacio mismo, esto es, lo extenso puro absoluto: puro de toda materia y de movimiento, y también absoluto, esto es, ilimitado, puesto que contiene toda extensión. Por ello todos los puntos están en el mismo espacio y se pueden referir mutuamente los unos a los otros. Que este espacio sea alguna cosa distinta de la materia o sólo una aparición constante o fenómeno, no me referiré a ello en este lugar.*
>
> *... Lo siguiente a considerar es el punto, es decir aquello más simple entre todo lo que pertenece al espacio o la extensión; pues del mismo modo que el espacio contiene a la extensión absoluta, así los puntos expresan lo que es máximamente limitado en la extensión, sin duda el simple situs De ahí se sigue que el punto es un mínimo y carece de partes, y todos los puntos son congruentes*

5 Al respecto, ver la introducción de J. Echeverría a LEIBNIZ (1995), así como ECHEVERRÍA (1984).

6 Véase la correspondencia cruzada entre Huygens y Leibniz en DE MORA, 2015, 7B, 433-437. También véase la correspondencia completa Leibniz-Huygens de 1679-80 en la edición Gerhardt, y principalmente, el Apéndice a la carta de Leibniz del 9 septiembre 1679, en DE MORA, 2015, 7B, 511-519. También, ECHEVERRÍA (1979), FREUDENTHAL (1972) y otros.

7 LEIBNIZ 1995, fragmento IX, 142-223.

> *entre sí (es decir, pueden coincidir), por lo tanto son semejantes y, se podría decir, iguales)"*[8].

A partir de esa definición de punto, Leibniz considera que se puede demostrar que todos los puntos son congruentes entre sí, lo cual significa a su vez que pueden coincidir: La coincidencia o igualdad entre puntos es una propiedad geométrica que hay que demostrar a partir de la definición dada, en lugar de darla por supuesta de manera intuitiva, como hace Euclides. Esta es la idea fundamental del proyecto leibniziano de revisión de los *Elementos* de Euclides: intentar demostrar muchas cosas que Euclides da por supuestas, y para ello recurrir a nuevas definiciones y axiomas geométricos, basados en la noción de *situs*.

## 4.- Una Geometría totalmente nueva y revolucionaria.

La tarea que Leibniz se plantea ahora consiste en revisar cada uno de los axiomas, postulados y demostraciones, así como las definiciones, principalmente del Libro I. de la Geometría de Euclides. En el resumen que remitía a Huygens en septiembre de 1679, se mostraba entusiasmado ante este nuevo descubrimiento:

> *"He encontrado algunos Elementos de Geometría totalmente nuevos y completamente diferentes del Álgebra, pues ésta es una característica de los números indeterminados o magnitudes, no expresa directamente la situación, los ángulos y el movimiento. El Álgebra está obligada a suponer los <u>Elementos de Geometría</u>, mientras que esta Característica "empuja el análisis hasta el final". Los caracteres utilizados en el Álgebra y en la Geometría no desarrollan todo lo que se debe considerar en el espacio. Por lo que resulta muy difícil expresar mediante el cálculo lo que la figura muestra, y más difícil todavía, producir en la figura lo que el cálculo obtiene".*

El proyecto de Leibniz apunta a la construcción de una *nueva* Geometría, y no al perfeccionamiento de la estructura deductiva o racional de los *Elementos*. El proyecto leibniziano no admite ninguna comparación en su época, y pro-

8 LEIBNIZ 1995,150-152.

bablemente habría que llegar hasta los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert para encontrar algo semejante en la Historia de la Geometría.

## 5.- La simbología necesaria: caracteres más que números.

El elemento principal de este nuevo análisis es la utilización de letras como caracteres básicos que representan cualquier cosa:

> *"La utilidad de los caracteres consiste en que mientras se opera con ellos, no es necesaria la cosa a la que representan hasta el final de la operación, cuando el descubrimiento que está en los caracteres es transferido a su vez a la cosa misma. Los Caracteres son cosas con las cuales se expresan las relaciones de otras cosas entre sí, y que son más fáciles de tratar que éstas. A todas las operaciones que se hagan con los caracteres corresponden enunciados referentes a las cosas y podemos con frecuencia diferir las consideraciones sobre las cosas mismas hasta el final de la operación... Así se pueden mostrar los movimientos de una máquina, se pueden representar cuerpos sólidos en una tabla plana, así es posible que no haya ningún punto de un cuerpo al que no se pueda asignar otro correspondiente en un plano según las leyes de la perspectiva".*

A continuación, define el concepto de distancia de la manera siguiente:

> *"Si se concibe la existencia o la percepción simultánea de dos puntos, lo que se ofrece a consideración es la relación del uno con el otro, que es diversa según sean las parejas de puntos, es decir, la relación de lugar o de situs que tienen mutuamente entre sí, lo que se entiende como la distancia entre ellos. Pues la distancia entre dos puntos no es otra cosa que la cantidad mínima de la vía del uno al otro, y si dos puntos A.B. conservan el situs entre sí, otros dos puntos C.D. que conserven también el situs entre sí, pueden ser congruentes o sustituirles, y su situs o distancia entre los dos sería la misma que la distancia entre aquellos otros dos. Pues son congruentes aquellos9 que pueden coincidir el uno con el otro sin hacer ninguna mutación de uno de ellos con respecto al otro".*

9 Pares de puntos.

## 6.- La vía de un punto. Una Geometría en movimiento. Una topología *avant la lettre*.

Y el camino que puede marcar un punto en movimiento se puede definir como la vía o también la línea correspondiente:

> *"La Vía[10] no es otra cosa que un lugar continuo sucesivo. Y a la vía de un punto la llamamos Línea. De ahí se comprende que los extremos de una línea sean puntos, y que cualquier parte de una línea es una línea o está terminada por puntos. Pues, de otra parte, una vía es un continuo, porque cualquiera de sus partes tiene extremos que son comunes con las partes anterior y posterior. Consecuencia de ello, dicho sea de paso, es que, si se traza una línea en alguna superficie, no puede otra línea de la misma superficie transitar progresando continuamente entre los dos extremos de la línea anterior sin cortarla".*

Igualmente definirá la superficie y el cuerpo, es decir las tres dimensiones, señalando que no se puede pasar de tres dimensiones a un número superior de las mismas.

> *"Del mismo modo, la vía de una línea cuyos puntos no siempre se sustituyen mutuamente, es una Superficie; y la vía de una superficie cuyos puntos no siempre se sustituyan mutuamente, es un <u>Cuerpo</u>. Pues un cuerpo no puede moverse sin que todos sus puntos se sustituyan mutuamente, y por lo tanto no puede producir nuevas dimensiones".*

La vía entre dos puntos puede ser una recta, pero también puede ser de otro modo Explica asimismo la generación de una recta a partir de un cuerpo cualquiera, e introduce la idea de una línea flexible entre dos puntos. Propone la idea de una línea flexible, es decir un camino entre dos puntos fijos tal que si la estirásemos en toda su longitud sería una recta o la distancia entre ambos puntos:

> *"Pues si los dos extremos de la línea permanecen inmutables y la línea misma se transforma, necesariamente algunos de sus puntos se alejan unos de otros. Igualmente, si los extremos de la línea permanecen inmutables, dejando*

10 Se puede decir también trayectoria.

*intacta la cantidad mínima entre dos puntos, no puede transformarse en otra, puesto que entre dos puntos no se dan varios mínimos no congruentes y diferentes. Pues si entre esos dos puntos las dos líneas fuesen mínimas, ambas serían rectas… Dos rectas entre dos puntos coinciden. Y la mínima línea entre dos puntos no puede ser más que única.*

*El procedimiento más simple para generar una línea recta es este. Sea un cuerpo cualquiera dos puntos del cual son inmutables y fijos, pero que el cuerpo no obstante se mueva, entonces todos los puntos del cuerpo incidirán en una recta que pasará por los dos puntos fijos. Pues es evidente que sus puntos*[11] *conservan el mismo lugar determinado por los dos puntos fijos dados, o sea que conservando dos puntos fijos, el sólido existente no puede moverse entero; mientras que los puntos exteriores a la recta pueden cambiar de lugar conservando su relación con los dos puntos fijos. El único inconveniente aquí es que una recta descrita de esta manera no es permanente. Se puede generar una línea recta de otro modo, si se utiliza una línea flexible, pero que no pueda estirarse en su longitud. Pues si separamos sus extremos todo lo posible, la línea flexible se transformará en recta".*

Insiste repetidamente en lo inadecuado de las figuras geométricas para investigar o demostrar proposiciones en geometría, y propone los caracteres, es decir las letras, como signos que sustituirán a las figuras y también a las ecuaciones abstractas como la del círculo, que no nos permite imaginar su forma y propiedades sin la ayuda de la figura:

*"Todo esto no es difícil conseguirlo mentalmente, aunque no se trace ninguna figura fuera de la imaginación, ni se empleen otros caracteres que las palabras, pero cuando se trata de razonamientos largos, producidos sólo con palabras que, concebidas como solían serlo hasta aquí, son escasamente exactas, y la imaginación escasamente ágil, hasta aquí los geómetras han tenido que apelar a las figuras. Pero por otra parte [éstas] son difíciles de delinear, y con la demora las mejores se dejan escapar, a veces se vuelven confusas las figuras por la multitud de puntos y de líneas, principalmente cuando estamos ensayando e investigando; de ahí que pudiese pensar en emplear los caracteres fructuosamente".*

11 Los puntos de la recta.

Las relaciones entre las diferentes "cosas" se van a regular por la homogeneidad, la congruencia o la igualdad, que son las tres relaciones principales de su análisis: Para explicarlo con mayor claridad empleará la definición del número y la magnitud:

> *"Número es aquello cuya relación con la unidad es la que hay entre la parte y el todo o bien entre el todo y la parte, entre los cuales incluyo los números fraccionarios y sordos*[12].
>
> *Magnitud de una cosa conocida de manera distinta*[13] *es el número (o el compuesto de números) de las partes de la cosa que son congruentes con un cierto objeto preciso (que se toma como medida). Pues si sabemos que una línea es igual a dos veces el lado y tres veces la diagonal de un cierto cuadrado perfectamente conocido por mí, al cual pueda remitirme siempre que quiera, diremos que la magnitud de la línea es conocida por mí y que tendrá dos partes congruentes con el lado y tres partes congruentes con la diagonal. Aunque se acepte elegir otras medidas diferentes, con las cuales se exprese la misma cosa de forma distinta, no obstante, siempre nos darán la misma magnitud, puesto que al descomponer a su vez estas mismas medidas siempre se llegará al mismo resultado; puesto que las mismas medidas contienen ya el mismo número, que se revela con la descomposición. De esta manera son un solo y el mismo número los tres cuartos y los seis octavos, siempre que el cuarto se resuelva a su vez en dos partes. De este modo se conoce la noción distinta de magnitud. Por otra parte, la magnitud es un atributo de la cosa por el cual puede conocerse si otra cosa propuesta es parte de aquella, o bien es homogénea con ella y permanece así a pesar de los cambios que se permitan entre sus partes. O también la magnitud es un atributo de la cosa que permanece idéntico cuando sus términos homogéneos permanecen o son sustituidos por otros congruentes… Más abajo propongo otra definición de magnitud, como es aquello en lo que dos cosas semejantes se pueden diferenciar, o aquello que sólo en la co-percepción de las cosas se puede discernir. Pero todas estas definiciones se reducen a lo mismo".*

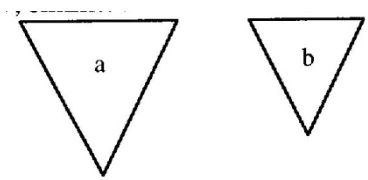
12 Número sordo es el que no tiene raíz exacta.

13 En el sentido de clara, inequívoca, que no se confunde con ninguna otra.

**7.-Semejanza y co-percepción.**

Las comparaciones y relaciones entre estos elementos se definen a continuación, describiendo lo igual y lo diferente y la proporción entre ellos:

> *"La Ratio entre A y B no es otra cosa que el número que expresa la magnitud de A si ponemos la magnitud de B como unidad. De ello resulta evidente que magnitud difiere de ratio como un número concreto difiere de un número abstracto; pues la magnitud es el número de cosas, de hecho el número de partes, la ratio en realidad es el número de unidades. Pues es evidente que la magnitud de las cosas permanece igual cualquiera que sea la medida elegida mediante la cual queramos expresarla; en cambio la ratio puede ser una u otra según sea una u otra la medida elegida. También es evidente que si se divide la magnitud del número expresado por A y la magnitud de otro número expresado por B (siempre que se haya aplicado la misma medida o unidad a las dos) se obtendrá el número que es la ratio entre el uno y el otro.*
> *Iguales son las cosas que tienen la misma magnitud, es decir, aquellas que se pueden considerar congruentes sin añadirles ni quitarles nada.*
> *Si dos cosas son homogéneas (es decir, se pueden tomar las partes de una de ellas iguales a partes de la otra y siempre se puede continuar haciéndolo en el resto de ellas) no hay ninguna diferencia entre las mismas, esto es que, si ni a es mayor que b ni b es mayor que a, son necesariamente iguales.*
> *Semejantes son aquellas cosas tales que, considerando cada una por sí misma, no se pueden discernir una de otra, por ejemplo, dos triángulos equiláteros, como en la figura:*




> *pues no podemos descubrir en el uno ningún atributo, ninguna propiedad, que no podamos descubrir en el otro; y llamando a uno de ellos a y al otro b, constataremos la semejanza. a ~ b.*
> *No obstante, cuando los percibimos simultáneamente, la diferencia aparece inmediatamente, uno es mayor que el otro. Lo mismo puede suceder si no los*

> *percibimos simultáneamente, si de algún modo tomamos un término medio o una medida que se aplicase primero a uno o al otro y se constatase en primer lugar de qué modo esa misma medida era congruente con el uno o con sus partes, y después la misma medida se aplicase al otro. Por eso suelo decir que lo semejante no se puede discernir más que por co-percepción".*

Por lo tanto, la *Magnitud* será precisamente esa diferencia que sólo la co-percepción de las cosas puede distinguir, esto es, o bien la aplicación inmediata, o sea congruencia actual o coincidencia, o bien mediata, es decir, con la utilización de una medida que se aplicase ahora a una ahora a la otra, pues basta que las cosas sean congruentes, es decir que puedan acordarse en acto. De ello deduce Leibniz que tanto lo semejante como lo igual es congruente. Pero si dos cosas no pueden distinguirse ni por su semejanza ni por su congruencia ni por su igualdad y además ocupan el mismo espacio, no son sino una sola cosa, es su teoría de los indiscernibles:

> *"Pues en realidad las cosas que coinciden son en todos los casos congruentes; las congruentes son en todos los casos semejantes y también son iguales. Aquí vemos que hay tres modos o si se quiere tres grados de distinción de las cosas provistas de extensión y que no tienen diferencias en sus otras cualidades. El máximo de estos grados es que no sean semejantes, pues es fácil discernir su diversidad observando en cada una de las cosas las propiedades que tienen en sí mismas: así un triángulo isósceles es fácil de discernir de un escaleno, incluso sin verlos simultáneamente. Pues si alguien me hace ver un triángulo preguntándome si es isósceles o escaleno, no tengo ninguna necesidad de tomar otro fuera de él, pues sólo comparo sus lados entre sí. En realidad, si me piden que elija el mayor de dos triángulos equiláteros, tengo que hacer una comparación de los triángulos o una co-percepción, como ya he explicado, y no puedo discriminar una nota diferente visible en alguno de ellos en particular. Si realmente dos cosas no son sólo semejantes sino también iguales, esto es, si son congruentes, no puedo distinguirlas si las percibo simultáneamente, a no ser por el lugar, es decir, a no ser respecto a otro que se tome fuera de los mismos y observando que tienen un situs diferente con respecto al tercero que hemos tomado. En fin, si ambas cosas están simultáneamente en el mismo lugar, no habría nada que me permitiera ya distinguirlas. Pues esta es la verdadera reflexión del Análisis de cuanto sabemos de estas cosas, la ignorancia de las cuales ha provocado que todavía no se haya constituido hasta ahora*

*una característica geométrica. Finalmente, de todo esto se comprende que, en la estimación de la magnitud, mientras que se pueda entender que las cosas son congruentes o que pueden reducirse a la congruencia, estimando así la proporción de su semejanza, o bien mientras que una cosa se pueda reducir a la semejanza, entonces todo resultará necesariamente proporcional".*

## 8.- Las condiciones para la igualdad.

Dos extensos son iguales si al transponer sus partes y conservar todos sus puntos y cantidad, resultan congruentes:

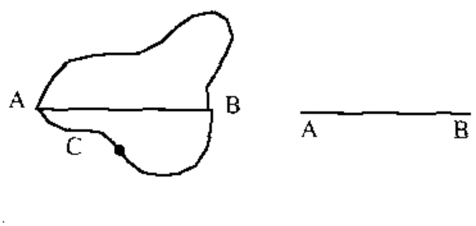
*"Si dos extensos, aunque no sean congruentes, pueden no obstante resultar congruentes sin ninguna modificación de su masa o cantidad, esto es conservando todos sus puntos, realizada solamente por una transmutación o transposición de sus partes o puntos, entonces se dice que son iguales".*

A designa el punto A y B designa el punto B.

A B

• •

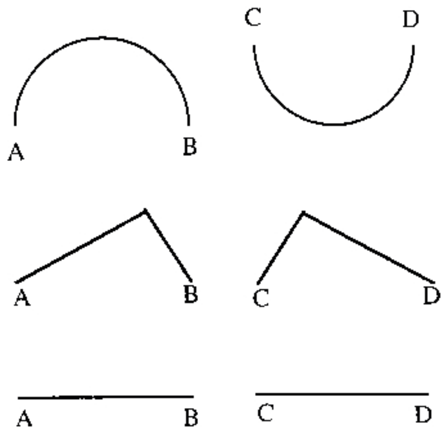
*"A.B significa el situs de los puntos A y B entre sí, es decir, cualquier extenso que los conecte (no importa si es curvilíneo o rectilíneo); el cual no cambia mientras el situs entre los dos puntos permanezca idéntico.*




*A.B.C. significa del mismo modo el situs de tres puntos A, B y C entre sí, es decir el extenso rígido que los conecta. Se puede igualmente considerar lo mismo de varios puntos".*

Por otra parte, si consideramos fijo el camino o vía entre dos pares de puntos, se puede realizar la transferencia del uno al otro. De ahí que considere necesario hablar de un camino “rígido”:

> *“A.B  C.D. significa que el situs entre los puntos A y B es el mismo que entre los puntos C y D. Es decir que el extenso que conecta A y B también puede conectar C y D, o sea que otro extenso congruente con el extenso que conecta A y B, puede también conectar los puntos C y D. Dicho de otro modo, los puntos A y B, conservando el situs o extenso rígido que los conecta, pueden transferirse al lugar de los puntos C y D.*




> *Aquí se debe notar lo siguiente: la Proposición A.B  B.A es siempre verdadera, es decir que el situs de A con respecto a B es el mismo que el de B respecto a A; puesto que el situs de los mismos entre sí es una relación en el sentido de que no implica ninguna discriminación entre los puntos y que ya entre los puntos no se puede discernir, puesto que siempre son congruentes. De aquí que se puedan transferir recíprocamente los unos en los otros conservando el situs, como A.B en (A).(B)”.*

Otro aspecto interesante de la concepción geométrica de Leibniz es que, tal como mencionábamos antes, introduce el movimiento como elemento necesario, relacionando así la geometría con su física:

*"Veamos si no sería más cómodo utilizar el movimiento que las secciones, teniendo en cuenta que las secciones son vestigios del movimiento que las genera. Y así no obstante podríamos abstenernos de las consideraciones de semejanza; nos ofrecería considerar solamente la congruencia.*
*El Movimiento es la mutación continua del situs".*

Esto le permite utilizar con facilidad la relación entre ese espacio puro o absoluto y las cosas, puntos, superficies o cuerpos limitados o finitos dentro del mismo:

*"Si dos ‹cosas› agotaran el espacio, y una de ellas fuera finita, se la llamaría cuerpo, o sólido, y lo que ella tenga en común con la otra, una sección o una parte de la misma, sería una superficie. Llamaremos superficie a lo común a dos integrantes del mismo cuerpo; se podría poner como objeción a esto el compuesto de dos globos tangentes en un punto, o de dos cuerpos que tuvieran en común una punta, pero se podría dudar que sean en realidad un solo cuerpo, es decir, que un cuerpo pueda ser transitado por aquello que no tiene más que un punto en común con él. Aquí se ha de explicar qué significa transitar. Sin duda, si no se puede desplazar aquello que transita, no podrá cortar el cuerpo si lo que corta es una tangente[14]. Propiamente una línea no es transitada, pero una superficie y un cuerpo pueden ser transitados. Una línea puede apartarse instantáneamente de otra línea, como hace en las tangentes. En ese tránsito, incluso si no tienen[15] más que un punto ‹común›, (como la recta que transita por una superficie), no pueden separarse instantáneamente".*

La forma en que los antiguos geómetras utilizaban las letras como caracteres, no permitía hacer patente la naturaleza misma de esas líneas, cuerpos, etc. y provocaba que se vieran obligados a ayudarse con las figuras:

*"Es un trabajo necesario perfeccionar la Característica Geométrica, que los antiguos comenzaron. Ellos expresan una recta por AB, un ángulo o un triángulo por ABC, adjudicando letras a los extremos de las líneas, o a otros puntos notables; esto ya puede conducirnos a algunas cosas, verbigracia, que el triángulo ABC tiene tres ángulos AbC, BcA, CaB, y tres lados AB, BC, CA; pero*

14 Es decir, la tangente corta en un punto, y no en una sección de superficie o de cuerpo.

15 Superficies o cuerpos.

*lo que no expresaban con este tipo de designaciones era la naturaleza misma de las líneas; de aquí que haya que suplir el resto, en parte por inspección de las figuras, y en parte por el comentario o el cálculo algebraico. Los comentarios no unidos a figuras suelen ser oscuros y tediosos, el cálculo algebraico con frecuencia pervierte la naturaleza de las cosas y nos hace pasar del situs y de las figuras a la magnitud y a los números, de modo que con frecuencia es difícil pasar de las figuras al cálculo, y al revés, hallado el cálculo, construir las figuras".*

También pone de manifiesto Leibniz en muchos de sus textos cómo las definiciones de Euclides no son suficientes y se prestan a confusiön:

*"Puesto que dijimos que la Recta es el lugar de todos los puntos determinados por su situación respecto a dos puntos dados, es evidente que la recta, si se imagina producida de cualquier modo, transitando por dos puntos, no sería única, y como consecuencia, dos rectas no pueden cortarse en dos puntos, puesto que no tienen dos puntos en común, mucho menos tendrán un segmento común. Pero tampoco delimitan un espacio, pues entonces, una vez separadas, volverían a juntarse. Y en ese caso se encontrarían dos veces.*

*Y es evidente que una recta no se corta a sí misma, puesto que la recta es la vía más breve de un punto a otro, se daría una distancia del punto desde el que, al punto en el que, se cortase a sí misma. Una recta no será tampoco tangente a otra recta, sino que la cortará, pues toda línea tangente a otra línea se supone que la corta en dos puntos, pero que en caso de contacto, coinciden. Pero una recta no puede cortar a otra recta en dos puntos. Luego hemos demostrado los Axiomas de Euclides 10, 11 y 14".*

## 9.-Consecuencias fundamentales de su planteamiento.

Resumiendo, en estos textos, Leibniz establece que los puntos geométricos son indiscernibles, a diferencia de los puntos físicos o metafísicos, todos diferentes entre sí. Pero al mismo tiempo considera rígidas las trayectorias entre los puntos; si las hubiera considerado flexibles, habría llegado a la topología del siglo XX. Los axiomas y proposiciones que Leibniz demuestra, son independientes de una métrica en particular. Aparecen los conceptos de punto interior, exterior o frontera, de conexión por arcos, y otros semejantes. No obstante, los textos aquí presentados no deben considerarse como definitivos, porque Leibniz siguió trabajando sobre el tema durante toda su vida, perfeccionando las notaciones y las definiciones. Se trata de una "invención" (en el sentido de su *Arte de Inventar*) apasionante y muy adelantada a su tiempo, razón por la cual no fue comprendida por Huygens ni publicada nunca.

## Referencias


- ECHEVERRÍA, J. (1979) «L'Analyse Géométrique de Grassmann et ses rapports avec la caractéristique Géométrique de Leibniz», *Studio Leibnizien* XI/2, 223-273.
- ECHEVERRÍA, J. (1980) *Edition critique des manuscrits de Leibniz concernant la Caractéristique Géométrique en 1679,* microfiches, Université de Lille ANRT1.84.1082. Lille III 1984. (Doctorat d'État, Université Paris I).
- EUCLIDES (1591,1607) *Euclidis Elementorum libri XV, accesit liber XVI,* ed. Ch. Clavius, Coloniae 1591; 2ª ed. Frankfurt, Hoffmann, 1607.
- EUCLIDES (1883-1888) *Euclidis Elementa (*ed. J. L. Heiberg), I-III, Leipzig.
- EUCLIDES (1991) *Elementos* (ed. Luis Vega), Madrid, Gredos.
- FREUDENTHAL, H. (1972) "Leibniz und die Analysis Situs", *Studia Leibnitiana* 4, 61-69.
- HOBBES, T. (1665) *Elementorum Philosophiae sectio Prima De Corpore*, Londini.
- LEIBNIZ, G. W. (1995) *La Caractéristique Géométrique* (ed. J. Echeverría & M. Parmentier), Paris, VRIN.
- DE MORA, M.S. (ed.) (2014, 2015) *Escritos Matemáticos de Leibniz*, vol. 7A y 7B, Colección: *G. W. Leibniz. Obras Filosóficas y Científicas,* Granada, Editorial Comares.